３　式の利用

１　式の利用(1)

教科書p. 36～38

Q　2，4や6，8のような連続する2つの偶数の積に1を加えると，計算の結果はどんな数になるでしょうか。いろいろな場合について調べ，予想しましょう。

2，4のとき，2×4＋1＝9　　［予想例］奇数
4，6のとき，4×6＋1＝25　　奇数の2乗
6，8のとき，6×8＋1＝49　　連続する2つの偶数の間にある奇数の2乗
8，10のとき，8×10＋1＝81
10，12のとき，10×12＋1＝121

問１　結衣さんは，「連続する2つの偶数の積に1を加えると，奇数の2乗になる」と予想し，そのことを次のように証明しました。$\boxed{}$をうめて，結衣さんの証明を完成させましょう。

連続する2つの偶数は，nを整数とすると，$\boxed{2n}$，$\boxed{2n+2}$と表される。

$$2n(\boxed{2n+2})+1=\boxed{4n^2+4n+1}$$
$$=(\boxed{2n+1})^2$$

nは$\boxed{\text{整数}}$だから，$\boxed{2n+1}$は$\boxed{\text{奇数}}$である。

したがって，連続する2つの偶数の積に1を加えると，奇数の2乗になる。

問２　問１の証明から，計算の結果が「奇数の2乗になる」こと以外に，どんなことを読み取ることができるでしょうか。

(例)連続する2つの偶数の間にある奇数の2乗になる。
小さい方の偶数に1を加えた数の2乗になる。

問３　連続する3つの整数では，中央の数の2乗から1をひいた差は，残りの2数の積に等しくなります。このことを，中央の数をnとして証明しましょう。

連続する3つの整数は，中央の数をnとすると，$n-1$，n，$n+1$と表される。

$$n^2-1=(n+1)(n-1)$$

したがって，連続する3つの整数では，中央の数の2乗から1をひいた差は，残りの2数の積に等しい。

３　式の利用

１　式の利用(2)

教科書p. 38

問１　連続する2つの奇数では，大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は，どんな数の倍数になるかを予想し，次のように証明しました。□をうめて証明を完成させましょう。

［予想］ $\boxed{8}$ の倍数になる。

［証明］ 連続する2つの奇数は，nを整数とすると，$\boxed{2n}-1$，$\boxed{2n}+1$と表される。

$$(\boxed{2n+1})^2-(\boxed{2n-1})^2=(\boxed{4n^2+4n+1})-(\boxed{4n^2-4n+1})$$
$$=\boxed{8n}$$

nは$\boxed{\text{整数}}$だから，$\boxed{8n}$は$\boxed{8}$の倍数である。

したがって，連続する2つの奇数では，大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は，$\boxed{8}$の倍数になる。

問２　問１の問題の条件を変えて「連続する2つの偶数」とした場合には，計算の結果がどうなるかを予想し，そのことを証明しましょう。

［予想］4の倍数になる。

［証明］連続する2つの偶数は，nを整数とすると，$2n$，$2n+2$と表される。

$$(2n+2)2-(2n)2=8n+4$$
$$=4(2n+1)$$

$2n+1$は整数だから，$4(2n+1)$は4の倍数である。

したがって，連続する2つの偶数では，大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は，4の倍数になる。

計算のくふう

問３　次の□にあてはまる数を書き入れましょう。

(1)　55^2-45^2

$=(\boxed{55}+\boxed{45})\times(\boxed{55}-\boxed{45})$

$=\boxed{100}\times\boxed{10}$

$=\boxed{1000}$

(2)　99^2

$=(\boxed{100}-1)$

$=\boxed{100}^2-2\times1\times\boxed{100}+1^2$

$=\boxed{9801}$

問４　式の展開や因数分解を使って，次の計算をしましょう。

(1)　28^2-22^2

$=(28+22)\times(28-22)$

$=50\times6$

$=300$

(2)　103×97

$=(100+3)\times(100-3)$

$=100^2-3^2$

$=9991$

(3)　102^2

$=(100+2)^2$

$=100^2+2\times2\times100+2^2$

$=10404$

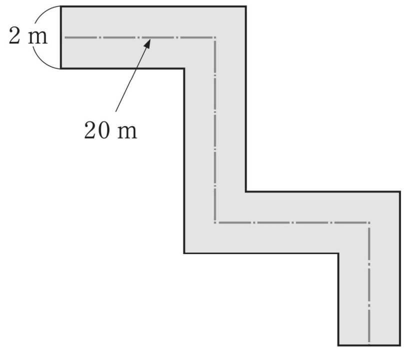
３　式の利用

１　式の利用(3)

教科書p. 39～40

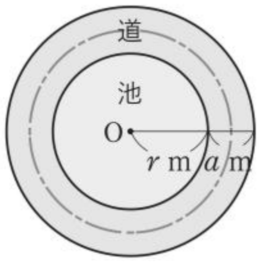
図形の性質

問１　右の図のように，直角に折れ曲がっている幅2mの道があります。この道の中央を通る線全体の長さが20mのとき，道の面積は何m²でしょうか。



道をまっすぐに直すと，縦2m，横20mの長方形になる。面積は，2×20＝40 より，40m²

問２　半径rmの円形の池の周囲に，幅amの道があります。この道の面積をS m²，道の中央を通る円周の長さをℓ mとするとき，$S=a\ell$ であることを，次のように証明しました。□をうめて証明を完成させましょう。



道の面積Sは，

$$S=\pi(\boxed{r+a})^2-\pi r^2$$
$$=\pi(\boxed{r^2+2ar+a^2})-\pi r^2$$
$$=2\pi ar+\pi a^2$$
$$=\pi a(\boxed{2r+a}) \quad ①$$

また，　道の中央を通る円の半径は，$(r+\frac{a}{2})$mであるから，円周の長さℓ は，

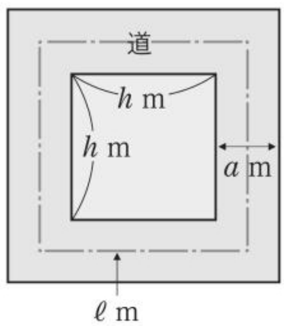
$$\ell=2\pi(r+\frac{a}{2})$$
$$=\pi(\boxed{2r+a})$$

したがって，

$$a\ell=\pi a(\boxed{2r+a}) \quad ②$$

①，②から，$S=\boxed{a\ell}$

問３　右の図のように，1辺がhmの正方形の池の周囲に，幅amの道があります。この道の面積をSm²，道の中央を通る線全体の長さをℓ mとして，$S=a\ell$ であることを証明しましょう。



$$S=(h+2a)^2-h^2$$
$$=(h^2+4ah+4a^2)-h^2$$
$$=4ah+4a^2$$
$$=4a(h+a)$$

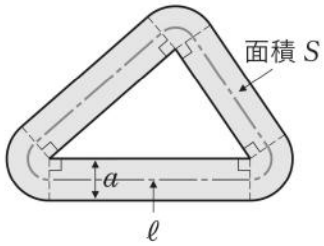
$\ell=4(h+a)$だから，$S=a\ell$

３　式の利用

１　式の利用(4)・確かめよう

教科書p. 40

問１　右のような図形でも，$S=a\ell$ が成り立つことを証明しましょう。



道の3つの曲線部分を合わせると半径aの円になる。道の直線部分全体の中央線の長さをℓ_1, 曲線部分全体の中央線の長さをℓ_2とすると，　$\ell=\ell_1+\ell_2$

道の直線部分全体の面積をS_1，曲線部分全体の面積をS_2とすると，　$S_1=a\ell_1$，$S_2=a\ell_2$

したがって，
$$
\begin{aligned}
S&=S_1+S_2\\
&=a\ell_1+a\ell_2\\
&=a(\ell_1+\ell_2)\\
&=a\ell
\end{aligned}
$$

１　連続する2つの整数では，大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は，はじめの2数の和に等しいことを証明しましょう。

連続する2つの整数は，nを整数とすると，n，$n+1$と表される。
$$
\begin{aligned}
(n+1)^2-n^2&=n^2+2n+1-n^2\\
&=2n+1\\
&=n+(n+1)
\end{aligned}
$$
したがって，連続する2つの整数では，大きい方の数の2乗から小さい方の数の2乗をひいた差は，はじめの2数の和に等しい。

２　次の数をくふうして計算しましょう。

(1)　65^2-15^2

$=(65+15)\times(65-15)$

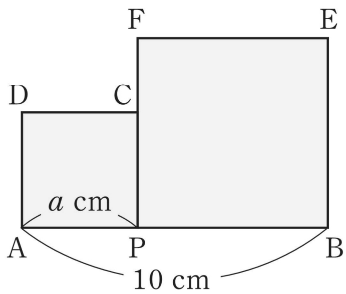
$=80\times50=4000$

(2)　4.8×5.2

$=(5-0.2)\times(5+0.2)$

$=5^2-0.2^2=24.96$

３　右の図のように，長さ10ｃｍの線分AB上に，点PをAP＝aｃｍとなるようにとり，AP，PBをそれぞれ1辺とする正方形をつくります。AP＜PBのとき，正方形PBEFの面積は，正方形APCDの面積よりどれだけ広いでしょうか。



$$
\begin{aligned}
(10-a)^2-a^2&=100-20a+a^2-a^2\\
&=100-20a
\end{aligned}
$$
$(100-20a)$ｃｍ^2 だけ広い。